

Diseño y construcción de un manipulador industrial de cinco grados de libertad: Modelado matemático y análisis del efector final.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo describe los resultados obtenidos al modelar matemáticamente, diseñar y manufacturar un prototipo de brazo robot del tipo manipulador vertical con cinco grados de libertad que permita la colocación de objetos en coordenadas con un gripper como efector final. La tarea de tomar y colocar un objeto consiste en considerar la coordenada del efector final del robot y la coordenada de la posición deseada en el espacio de trabajo. Se describe el diseño y modelo matemático de su cinemática directa; así como el análisis del movimiento de su efector final mediante la transformación del espacio cartesiano al de las articulaciones respecto a sus eslabones utilizando el algoritmo de parametrización matricial Denavit-Hartenberg (D-H) para cinemática directa, su validación y simulación en MATLAB para obtener las coordenadas del efector final. Posteriormente se describe el diseño y manufactura en PVC del modelado utilizando servomotores controlados por una tarjeta servocontroladora con GUI de diseño propio para experimentar y comparar los resultados del modelo matemático, y su simulación respecto al prototipo físico.

Palabras Clave- parametrización matricial, cinemática directa, parametrización Denavit-Hartenberg, robótica, metodología de manufactura.

Abstract- This paper describes the results in the modelling, design and build of a vertical manipulator robotic-arm prototype with 5-degree of freedom designed to perform a pick and place task with its gripper; considering the end-effector coordinate of the robot and the desired position coordinate in its workspace. This research describes a robot forward kinematics mathematical modeling and its gripper motion through a joint space analysis defined by the transformation from the cartesian space respect the joint space. The Denavit-Hartenberg (D-H) forward kinematics matrix technique is used to model the manipulator's links and joints to validate a design and simulate in MATLAB to get the robot's gripper coordinate. Based on the mathematical model the robotic arm was design and build using servomotors driven by a self design reprogrammable USB-HID servocontroller with a Window's GUI to experiment and compare results of the physical prototype, mathematical model and simulation.

Keywords- matrix setting, forward kinematics, Denavit-Hartenberg setting, robotics, manufacture methodology.

Mathematical Subject Classification: 70Q05

I. INTRODUCCIÓN

Los manipuladores industriales son robots antropomórficos articulados que desarrollan procesos de

manufactura programable mediante articulaciones formadas por motoreductores servocontrolados que brindan un torque conectados a eslabones logrando un movimiento de rotación o de desplazamiento traslacional.

La palabra diseño proviene del latín designare que significa “diseño o marcado”; por otro lado la ABET (2019) define al diseño de ingeniería como:

Engineering design is the process of devising a system, component, or process to meet desired needs. It is a decision-making process (often iterative), in which the basic sciences, mathematics, and the engineering sciences are applied to convert resources optimally to meet these stated needs [1].

Con base a lo anterior el presente estudio se centra en el diseño y modelado de un robot formado por una cadena cinemática de articulaciones más un efector final que colocará un objeto de una posición inicial a una final, su manufactura, construcción del prototipo físico articulado con servomotores y la realización de pruebas de control.

II. TEORÍA DE MATRICES

Las técnicas de modelado matemático mediante matrices surge desde la necesidad de querer representar fenómenos físicos en representaciones numéricas y se remontan a antes del siglo II A.C.[2], en un tratado hecho en China de la dinastía Han que data del 200 A.C llamado arte matemático el que describe métodos sobre matrices en un problema de combinatoria de granos resolviéndolo sobre un tablero divisible que permite encontrar la solución para un 3er tipo de grano, después para el 2º y después para el 1º mediante su sustitución recursiva en reversa; este método se conoce occidental y modernamente como eliminación Gaussiana y data del siglo XIX.

Autores como Cardano en in Ars Magna (1545) [3] indicó reglas para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales denominado *regula de modo* [4] y que llama a su vez *madre de reglas*, la cual sirve de base para la regla de Cramer de 2x2 dando un acercamiento a la noción determinante. En el libro Elementos de curvas (Jan De Witt, 1660) [5] se encuentra un extenso agregado en la versión en latín de La Géométrie (Descartes,1637) que describe que la transformación de los

ejos se reduce a una ecuación dada para una cónica a su forma canónica sin la diagonalización matricial actual.

El concepto de resolución general de determinante data de 1683 en Japón con el tratado 隱題之法 (*Kaiindai no hō*: Método de solución de problemas ocultos) de Takakazu Shinsuke Seki [6] el cual también descubrió los números Bernoulli antes que el mismo Jacob Bernoulli diez años después en una carta de Leibniz a L'Hôpital se describe un sistema de ecuaciones sin la generalización de su contraparte oriental.

Leibniz [2] utilizó el término “resultante” para la combinatorias de sumas de términos de una determinante probando lo que es en esencia la regla de Cramer.

En 1730's Maclaurin escribe Treatise of algebra [7] (publicado hasta 1749) con la prueba por determinantes de la regla de Cramer de sistemas 2x2 y 3x3 y la descripción para 4x4.

En el paper Introduction to the analysis of algebraic curves (1750) Cramer [8] describe la regla general para sistemas $n \times n$.

En 1764 Bezout describe metodología para determinantes, continuado por Vandermonde en 1771; en 1772 Laplace discute la solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes y acuñó el término [2].

En 1773 Lagrange [9] publica un trabajo de mecánica en donde se da la interpretación de un determinante.

Gauss usa el término determinante [10] en Disquisitiones arithmeticae (1801) [11] ya que determina las propiedades de la ecuación cuadrática describiendo el producto y la matriz inversa (1812) [12] desde los arreglos de coeficientes de formas cuadradas; en 1826 Cauchy [13] respecto a las formas cuadráticas en n variables utiliza el término *tableau* como matriz de coeficientes, diagonalización.

Kronecker [14] en 1850 y Weierstrass en 1860 trabajaron en el campo de transformación lineal de matrices; posteriormente Jacobi en 1841 algoritmizó las determinantes.

Cauchy en 1858 [2] publica *Memorias sobre teorías de matrices* con la primera definición abstracta de matriz y describe la propiedad aditiva, producto, producto escalar, e inversas y probó que una matriz satisface su propia ecuación característica en 2×2 y 3×3 pero es el teorema Cayley – Hamilton el que prueba 4x4 como cuaterniones.

Se define una matriz \mathcal{M} de cuerpo \mathbb{K} como un arreglo rectangular de m filas y n columnas como:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \{a_{ij}\} \mid a_{ij}, m, n \in \mathbb{R}; i = \{1 \dots m\}; j = \{1, \dots, n\}; \quad (1)$$

Considerando el sistema como un dominio $D \in \mathbb{Z}$ con m ecuaciones lineales y n indeterminadas $\{x_1 \dots x_n\}$ cuyos coeficientes en D es una ecuación [8]:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \mid a_i, b \in D; i = \{1 \dots n\} \quad (2)$$

Análogamente:

$$a_{ij}, b_i, m, n \in \mathbb{R} \mid \forall i = \{1 \dots m\}; j = \{1 \dots n\} \quad (3)$$

Considerando $b_i \dots b_m$ como términos independientes del arreglo su arreglo se describe como:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \quad (4)$$

El sistema (4) puede ser solucionado mediante un elemento s descrito como:

$$(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \mid \forall i = \{1 \dots m\} \rightarrow a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i \quad (5)$$

Se denomina a (4) matriz de coeficientes $m \times (n + 1) \in \mathbb{R}$ del sistema de ecuaciones descrito en (2) y (3) determinado por los coeficientes de las indeterminadas y los términos independientes [8].

Así mismo:

$$\mathcal{M}1_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}2_{m,n}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow [((m, n) \in \mathcal{M}1 \wedge \mathcal{M}2) \wedge (\mathcal{M}1, \mathcal{M}2 \in \mathbb{K})] \quad (6)$$

$$\mathcal{M}1_{m,n}(\mathbb{K}) + \mathcal{M}2_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \mathcal{M}1 = \{a_{ij}\}, \mathcal{M}2 = \{b_{ij}\} = \mathcal{M}3_{m,n}(\mathbb{K}) = \{c_{ij}\}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \therefore \mathcal{M}1 + \mathcal{M}2 = \mathcal{M}3 \quad (7)$$

$$[\mathcal{M}1_{m,l} = \{a_{ij}\}] [\mathcal{M}2_{l,n} = \{b_{ij}\}] = \mathcal{M}3_{m,n} = \{c_{ij}\} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \therefore \mathcal{M}1 \cdot \mathcal{M}2 = \mathcal{M}3 \quad (8)$$

$$(\mathcal{M}1)(\alpha) \mid (\alpha \in \mathbb{R}; \mathcal{M}2 = \alpha \mathcal{M}1 = c_{ij} \therefore \mathcal{M}1(\alpha) = \alpha \cdot a_{ij} \quad (9)$$

Cumpléndose la propiedad asociativa:

$$(\mathcal{M}1 + \mathcal{M}2) + \mathcal{M}3 = \mathcal{M}1 + (\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3) \text{ debido a: } (\{a_{ij}\} + \{b_{ij}\}) + \{c_{ij}\} = \{a_{ij}\} + (\{b_{ij}\} + \{c_{ij}\}) \text{ y que } \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_{ij}\} \in \mathbb{K} \quad (10)$$

Conmutativa:

$$\mathcal{M}1 + \mathcal{M}2 = \mathcal{M}2 + \mathcal{M}1 \text{ debido a: } \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\} = \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\} \text{ siendo: } \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_{ij}\} \in \mathbb{K} \quad (11)$$

Así mismo:

$$\mathcal{M}1 (\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3) = \mathcal{M}1 \mathcal{M}2 + \mathcal{M}1 \mathcal{M}3 \quad (12)$$

$$(\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3)\mathcal{M}4 = \mathcal{M}2\mathcal{M}4 + \mathcal{M}3\mathcal{M}4 \quad (13)$$

$$\mathcal{M}1(\mathcal{M}2\mathcal{M}3) = (\mathcal{M}1\mathcal{M}2)\mathcal{M}3 \quad (14)$$

Siendo que $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2 \neq \mathcal{M}2.\mathcal{M}1$.

Cuando $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2 = \mathcal{M}2.\mathcal{M}1$ se describe una conmutación matricial [8].

Para la matriz asociada a una transformación lineal se debe establecer que éstas son algunas funciones que se encuentran dentro de espacios vectoriales *-asociados en mecánica a los ejes de coordenadas donde se desplazan los dispositivos-* que permiten obtener una descripción respecto a los sistemas de ecuaciones lineales.

Un espacio vectorial queda descrito como $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{C}^n \mid n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{U} \mathbb{C}$; \mathbb{R} : *espacio euclideo*; \mathbb{C} : *espacio unitario* $\Rightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \{x_i\}_{i=1}^n$; su magnitud se describe por:

$$|\vec{x}| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad (15)$$

Mientras que su sentido $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \vee \mathbb{C}^n$; por lo que se pueden realizar las operaciones vectoriales por números $\alpha \in \mathbb{R}^n \vee \beta \in \mathbb{C}^n$:

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \quad (16)$$

Con sus propiedades:

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}; \quad (17)$$

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}; \quad (18)$$

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \quad (19)$$

La relación $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$; siendo en el espacio vectorial:

$$\mathbb{R}^n \perp \mathbb{C}^n \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \equiv |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = 0 \quad (20)$$

La transformación lineal [14] se describe con los componentes espacios vectoriales $V, W \in \mathbb{R}$; así mismo la función $T: V \rightarrow W$.

Es una transformación lineal:

$$T \leftrightarrow (\forall \vec{s}, \vec{s}') \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Con las propiedades de las funciones que describen como se componen los espacios vectoriales [14]:

$$T(\vec{s} + \vec{s}') = T(\vec{s}) + T(\vec{s}') \quad (22)$$

$$T(\alpha \cdot \vec{s}) = T \cdot \alpha(\vec{s}) \quad (23)$$

Mecánicamente se pueden representar un conjunto de escalares $a_{ij} \dots a_{ij}$ con comportamiento cinemático de

acuerdo a lo discutido en (1)-(20) a estos se les puede obtener una descripción $T(21)$ a través de una matriz \mathcal{M} asociada a T manteniendo una base canónica de \mathbb{K}^n y \mathbb{K}^m denotada por la matriz de transformación $\mathcal{M}(T)$ [14].

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad (24)$$

La matriz asociada $\mathcal{M}(T)$ a la identidad en \mathbb{K}^n es la matriz de identidad $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Se especifica \mathbb{K} como \mathbb{R} para las descripciones mecánicas siguientes.

III. METODOLOGÍA

Las técnicas de modelado y diseño asistido por computadora (CAD) y manufactura asistida por computadora (CAM) permiten experimentar y llevar los modelos a sus límites [15]. El modelado y virtualización previo a la construcción física utilizando las técnicas de prototipado permiten comprobar el diseño mediante una simulación del comportamiento antes de su construcción física; evitando tener que invertir recursos de manufactura en un producto que podría fallar [16].

La metodología es aquella que describe al algoritmo de desarrollo del diseño de maquinaria Bonsiepe [17]; la seleccionada para el diseño fue la de Robert Norton [18], la cual describe que la misma es un proceso iterativo que contiene aspectos desde el diseño hasta la manufactura en 10 pasos; debiendo retornar a un paso anterior si llegara a fallar el actual ordenándolas en:

Identificación, Investigación preliminar, Planteamiento de objetivos, Especificaciones de desempeño, Ideación e invención, Análisis, Selección, Diseño detallado, Creación de prototipos-pruebas y Producción [18].

La metodología de manufactura descrita fue propuesta para obtener un prototipo funcional capaz de manipular un objeto seleccionando de una posición inicial a una final mediante el algoritmo anteriormente descrito descartando la producción, al ser una investigación académica sin fines de lucro; sin descartar la posibilidad de ser llevado a la manufactura de fabricación en serie.

IV. DESCRIPCIÓN DEL ROBOT

1.-Identificación de la necesidad: Debido a que diversos procesos industriales implican el desplazamiento de un objeto de una posición inicial a una final; así como el estudio del modelado matemático de su solución se propone el diseño, modelo matemático, manufactura y control de un manipulador industrial que reposicione un objeto. El objeto seleccionado será un dulce de 0.148 oz [19] de dimensiones $x \cdot y$ y se utilizará una matriz sobrepuesta segmentada en milímetros para comprobar las posiciones obtenidas. **2.-Investigación preliminar:** De acuerdo al vocabulario de la norma ISO 8373 [20] un manipulador industrial es:

machine in which the mechanism usually consists of a series of segments, jointed or sliding relative to one another, for the purpose of grasping and/or moving objects

(pieces or tools) usually in several degrees of freedom (p.1).

Al conjunto de articulaciones de un robot se denominan cadena cinemática [21]; siendo la última de ellas el efector final el cual es una “herramienta” pudiendo ser intercambiable en la mayoría de los manipuladores industriales por grippers (pinzas para atrapar objetos), estaciones de soldadura, cortadoras, suministradores y otros [20].

El modelado matemático de la cinemática del robot consistirá en el estudio de su movimiento descartando las fuerzas que lo causan.

La cinemática directa describe y determina la posición cartesiana y orientación de una cadena de coordenadas relacionadas y será la utilizada en el modelado del prototipo MATHBOT.

La cinemática inversa consiste en determinar las variables conjuntas respecto a una posición y orientación del efector final del robot.

El un diseño y modelado matemático mecánico se vuelve complejo respecto al número de GDL (grados de libertad) y mecanismos de efecto múltiple como son los desplazamientos espaciales y el número de efectores vinculados.

3.-Planteamiento de objetivos: Se propuso realizar el análisis del problema de reposicionamiento de un objeto y las características del objeto, modelar matemáticamente el manipulador industrial, simular el modelo matemático del manipulador.

Con base a lo anterior hacer un diseño CAD de la estructura y ensamble del prototipo modelad, seleccionar los servomotores y material adecuados.

Por último, manufacturar el prototipo, experimentar con el prototipo y comprobar que el prototipo se adecua al modelo.

4.-Especificaciones de desempeño: El manipulador industrial deberá posicionar un objeto de 0.148 oz [19] y medidas 30 mm por 20 mm de una posición inicial a una final pudiendo girar y rotar el objeto; no se abordará en la fuerza y velocidad debido a que para fines del artículo interesa sólo el modelado de la cinemática directa.

Se trabajará con el desempeño de la cadena cinemática directa de un robot de 5-GDL con servomotores controlados a construir; el modelado se realizará matemáticamente y se comprobará mediante una simulación en MATLAB procediendo con la metodología.

5.-Ideación e invención: Se propone el diseño de un manipulador industrial vertical denominado MATHBOT que debe ser conceptualizado como una cadena cinemática con 5 articulaciones o 6 si se considera al gripper como actuator final como se describe en la figura 1, en donde se pueden identificar las articulaciones y eslabones del manipulador industrial.

Los movimientos posibles de las articulaciones se describen en la figura 1 y tabla 1.

Para establecer los parámetros Denavit-Hartenberg [21] modelados en la figura 2 se asignarán valores de parametrización para el diseño descartando la articulación 4 “pitch” debido a que se mantendrá recta en el posicionamiento.

Se describe a θ como el desplazamiento respecto al eje Y, α respecto a X; a describe el desplazamiento respecto al centro de la base que sostiene al manipulador y D el desplazamiento de la articulación anterior.

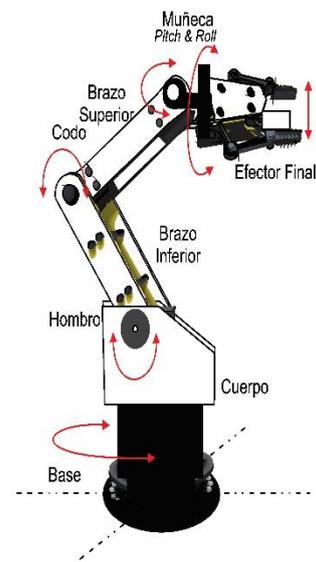


Fig. 1. Partes de un manipulador industrial.

Tabla 1. Movimientos del manipulador industrial

Eje	Nombre	Movimiento.
1	Base	Gira el cuerpo.
2	Hombro	Levanta y Baja el brazo inferior.
3	Codo	Levanta y Baja el brazo Superior.
4	Muñeca (Pitch)	Levanta y baja el Efector Final (Gripper).
5	Muñeca (Roll)	Rota el Efector Final (Gripper).

Para obtener la solución cinemática se modela cada unión comenzando con la base hasta el efector final asignando literales como se describe en la figura 2.

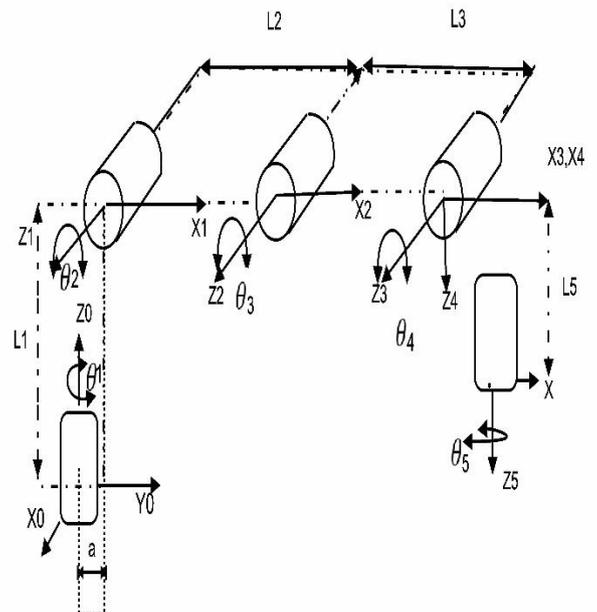


Fig. 2 Asignación de cada unión del robot descartando L4(Pitch).

Por lo anterior respecto a la θ en la articulación base al girar sobre Z que descansa.

Se utiliza L para describir el eslabón de trabajo y A para el adelantamiento o desplazamiento respecto a un eje.

La figura 3 describe los parámetros y distancias a las que se encuentran los eslabones.

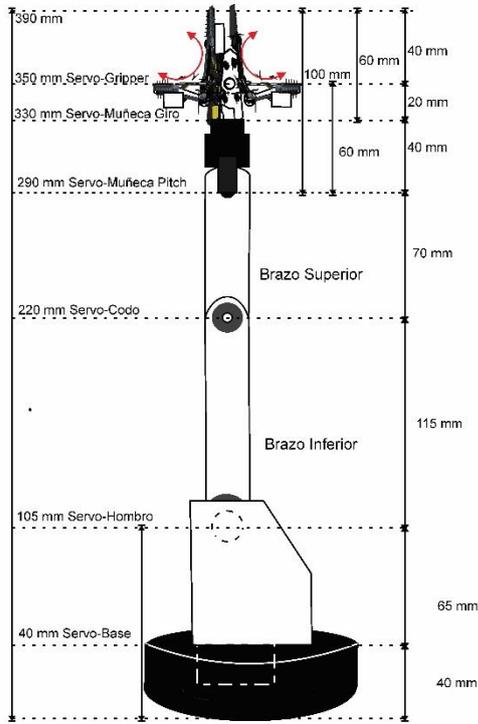


Fig. 3 Esquema de acuerdo a los valores establecidos por la parametrización Denavit-Hartenberg.

V. MODELADO MATEMÁTICO DEL ROBOT MEDIANTE METODOLOGÍA DENAVIT-HARTENBERG.

Continuando con la metodología descrita anteriormente se procede a realizar el paso siguiente:

6.-Análisis de las variables a considerar: Para estudiar el problema cinemático se utilizará el algoritmo Denavit-Hartenberg [21] que es utilizado para modelar las articulaciones y eslabones de los robots.

Para analizar el movimiento del robot MATHBOT se utilizará la cinemática directa para determinar la posición y orientación del gripper mediante el conocimiento de los valores dados para la variación de las articulaciones dadas en el diseño de la figura 3.

La representación D-H [21] anterior dependerá de cuatro parámetros de eslabones válidos:

- a_i (Longitud del eslabón) = La distancia desde Z_{i-1} a Z_i medido desde X_i .
- α_i (eslabón de giro de cadera) = El ángulo desde Z_{i-1} a Z_i medido desde X_i .
- d_i (Distancia articular) = La distancia desde X_{i-1} hasta X_i medido desde Z_{i-1} .
 - θ_i (Joint angle) = El ángulo desde X_{i-1} a X_i medido desde Z_{i-1} .

La matriz de transformación homogénea [14] de 4x4 es utilizada para determinar la cinemática directa. Puede ser desarrollada de acuerdo al $\{i-1\} \wedge \{i\}$.

A continuación, se asignan los valores de parametrización para su diseño de la matriz:

Eslabón	θ	D	A	α
L {1}	q_1	10.5	0	$\frac{\pi}{2}$
L {2}	q_2	0	11.5	0
L {3}	q_3	0	7	0
L {4}	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$
L {5}	q_5	4	0	0

Siendo correspondiente a una longitud máxima de 33 cm sin tomar en cuenta el actuador final (gripper abierto), queda el desplazamiento mediante:

0.-El origen es la coordenada (0,0,0) que es el piso sobre el que descansa el primer servomotor.

1.-El primer eslabón a considerar será el hombro denominado L {1}; tomando en cuenta el origen O hasta la unión con el primer eslabón, se encuentra adelantado en las ordenadas en $D=10.5\text{cm}$ en donde se colocará el primer servomotor con un $A=0$ y α de $\frac{\pi}{2}$.

2.-La base de la estructura L {2} donde descansa el codo y se encuentra sin rotación y adelantado respecto al eje de las ordenadas del piso en $A=11.5\text{cm}$.

3.- L {3} es el eslabón del codo al pitch y se encuentra desplazado en las ordenadas respecto a codo en $A=7\text{cm}$ sin rotación.

4.- L {4} es el eslabón del pitch al gripper de la muñeca y sólo se tomará el α de $\frac{\pi}{2}$ al estar unido al brazo superior por lo que se descarta q_4 .

5.- L {5} es el eslabón del roll de la muñeca junto con el servomotor del gripper hasta el comienzo de la pinza (palma) y se encuentra desplazado en las abscisas respecto a codo en $D=4\text{cm}$.

La altura máxima a considerar como mecanismo en la posición de la figura 3 será entonces de 33 cm del piso al origen del gripper abierto, pudiendo llegar con gripper cerrado a 39 cm.

Continuando con la metodología anterior se diseñó la siguiente descripción matemática que consiste en cuatro transformaciones básicas [14]:

$${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En donde $S\theta_i = \sin\theta_i$, $C\theta_i = \cos\theta_i$, $S\alpha_i = \sin\alpha_i$, $C\alpha_i = \cos\alpha_i$. Posteriormente se sustituyen los parámetros D-H de la tabla 1 en (25) y (26); la matriz de transmisión de cada eslabón es como sigue [21]:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & aC_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & aS_1 \\ 0 & 1 & C\alpha_1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_1 & C_2 & -C_2 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$${}^3T_5 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_1 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para determinar la matriz de transformación del efector final T_e ; donde $T_e = T_5^0$.

El producto de las matrices (27) a (31) permite obtener la matriz:

$${}^0T_5 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 \quad (32)$$

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 & K_7 & P_X \\ K_2 & K_5 & K_8 & P_Y \\ K_3 & K_6 & K_9 & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Donde:

$$K_1 = C_1 C_5 C_{2*3*4} + S_1 S_5$$

$$K_2 = -C_1 S_5 + S_1 C_{2*3*4} C_5$$

$$K_3 = C_5 S_{2*3*4}$$

$$K_4 = S_1 C_5 + C_1 C_{2*3*4} S_5$$

$$K_5 = -C_1 C_5 - S_1 C_{2*3*4} S_5$$

$$K_6 = -S_{2*3*4} S_5$$

$$K_7 = C_1 S_{2*3*4}$$

$$K_8 = S_1 S_{2*3*4}$$

$$K_9 = -C_{2*3*4}$$

Pudiendo obtener el valor del efector final coordenado en el espacio cartesiano de MATHBOT como:

$$\begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a + L_3 C_{2*3} + L_5 C_{2*3*4} + L_2 C_2) \\ S_1(a + L_3 S_{2*3} + L_5 C_{2*3*4} + L_2 C_2) \\ L_1 + L_3 S_{2*3} - L_5 C_{2*3*4} + L_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Así mismo:

$$S_x = \sin \theta_x, C_x = \cos \theta_x, S_{xy} = \sin(\theta_x + \theta_y)$$

$$C_{xy} = \cos(\theta_x + \theta_y)$$

$$S_{xyz} = \sin(\theta_x + \theta_y + \theta_z)$$

$$C_{xyz} = \cos(\theta_x + \theta_y + \theta_z)$$

Sustituyendo los valores y realizando el producto matricial equivalente a la transformación D-H [21] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Sustituyendo los valores en la transformación Denavit Hartenberg se obtiene de igual forma la misma que en (35):

$$\begin{bmatrix} 0 & -0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Con el modelo matemático anteriormente descrito se pueden indicar ángulos para la cinemática directa como el de una posición de arranque en donde todos los servomotores sean energizados en forma de cadena lineal vertical serían la configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ como:

$$\left[0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right] \quad (37)$$

El ángulo y posición del efector final (E) utilizando el modelo matemático (33) y descartando el efector final θ_5 quedaría como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 0 \\ Ey & 0 \\ Ez & 33 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Por otro lado, una posición desenergizada de los servomotores marcará lo contrario; es decir una configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ como:

$$\left[0 \quad \frac{\pi}{2} \quad -3\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \right] \quad (39)$$

La posición del efector (E) queda susutituyendo (39) descartando el efector final θ_5 en (33) como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 4.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 13.05 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para poder tomar un objeto la posición del gripper con el robot queda dada por una configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ de:

$$\left[0 \quad \frac{\pi}{2} \quad -3\frac{\pi}{4} \quad 3\frac{\pi}{4} \quad 0 \right] \quad (41)$$

(E) toma la posición al susutituir (41) en (33) descartando el efector final θ_5 como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 8.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 17.05 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Una vez tomado el objeto se girará sobre la base en la misma posición para dejar el objeto siendo la configuración angular $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ dada por:

$$\left[\pi \quad \frac{\pi}{2} \quad -3\frac{\pi}{4} \quad 3\frac{\pi}{4} \quad 0 \right] \quad (43)$$

El efector final (E) susutituyendo (43) en (33) descartando el efector final θ_5 coloca el objeto final mediante:

$$\begin{bmatrix} Ex & -8.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 17.05 \end{bmatrix} \quad (44)$$

7.-Selección: Con base a los valores descritos en el diseño y modelado matemático se diseñará un brazo robot de 5 eslabones, un gripper y seis GDL utilizando servomotores que puedan ocupar los espacios entre los eslabones manteniendo los tamaños.

De acuerdo al esquema de la figura 3 se seleccionó para el ensamble del diseño a manufacturar tres servomotorreductores Hitec HS-311, un DYNAMIXEL AX para la base y dos Servomotor Micro HD-1900A para el gripper debido a sus características y tamaño [22].

VI. CAD

De acuerdo al diseño de la figura 3 y al modelado matemático se procedió a realizar su simulación utilizando los parámetros Denavit-Hartenberg descritos anteriormente.

8.-Diseño detallado CAD: Siendo correspondiente el desplazamiento de acuerdo al modelado matemático y el

diseño de la figura 3, se diseñó mediante AutoCAD los eslabones tomando en cuenta los servomotores anteriormente descritos utilizando los siguientes parámetros:

El origen (piso) como coordenada (0,0,0); el hombro L {1} con $D=10.5\text{cm}$ con rotado en $\frac{\pi}{2}$ para α ; la base L {2} adelantado a las abscisas en $A=4\text{ cm}$. como se describe en la figura 4.

El eslabón del codo L {3} está desplazado a las ordenadas hombro en $A=7\text{ cm}$ como se describe en la figura 5.

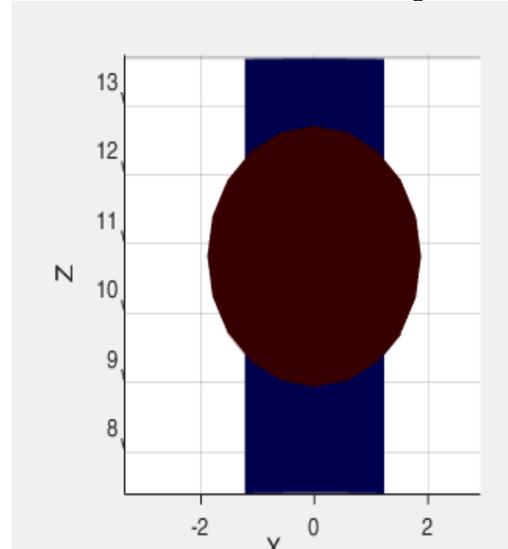


Fig. 4. Descripción de L {1} y L {2}

El eslabón final hacia la muñeca encuentra dividida en el eslabón de pitch de la muñeca L {4} descartado para parametrización con una rotación en α en $\frac{\pi}{2}$ pero es considerado en su simulación gráfica.

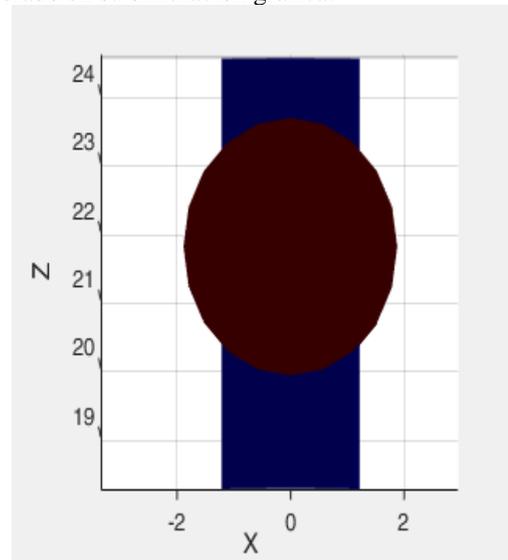


Fig. 5. L {3}

Se considera a continuación para el movimiento de la muñeca el roll L {5} desde el codo hasta el origen del actuador final desplazado en las abscisas respecto al codo en $A=4\text{cm}$ obteniendo el mecanismo con este último eslabón una altura máxima de 33 cm en posición de gripper abierto para tomar objetos y pudiendo alcanzar un tamaño máximo de 39 cm con el gripper cerrado; como se describe en la figura 6.

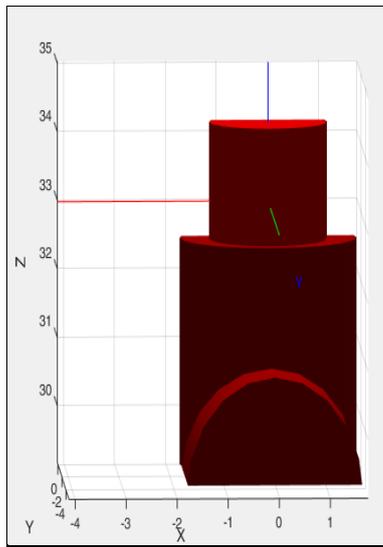


Fig. 6. L {5}

VII. SIMULACIÓN

El diseño CAD y modelado de la cinemática directa del robot MATHBOT fue comprobado mediante una simulación utilizando el lenguaje MATLAB para examinar la eficiencia del modelo matemático descrito en la matriz 0T_5 (33) con los parámetros descritos comparando los resultados respecto a la simulación.

Dado el conjunto de ángulos con entrada para el desarrollo de la cinemática directa 0T_5 (33) y MATLAB los resultados correspondientes al modelado matemático han sido comparados y graficados.

Al ejecutar la simulación se programaron los siguientes resultados de Denavit-Hartenberg (D-H) [21] de acuerdo a (25):

```
Rob = noname: 5 axis, RRRRR, stdDH, slowRNE
+-----+
| j |   theta |       d |   a |
alpha |   offset |       |   |
+-----+
| 1 |   q1 | 10.5 | 0 |
1.5708 |   0 |       |   |
| 2 |   q2 | 0 | 11.5 |
0 |   0 |       |   |
| 3 |   q3 | 0 | 7 |
0 |   0 |       |   |
| 4 |   q4 | 0 | 0 |
1.5708 |   0 |       |   |
| 5 |   q5 | 4 | 0 |
0 |   0 |       |   |
+-----+
```

Los comandos anteriores describen en la columna j que el manipulador tiene 5 grados de libertad; así como sus respectivos parámetros configurados de θ , d, a y α con sus respectivos valores de $\frac{\pi}{2}$ en decimal y las L1 a L5.

Al realizar el producto matricial en la simulación se obtiene con los comandos:

```
PRODUCTOMATRICIAL=R_tetha*D_d*D_a*R_alph
```

Coincidiendo con los valores obtenidos en la matriz (36):

```
0.0000    -0.0000    1.0000    0.0000
1.0000     0.0000   -0.0000    1.0000
0          1.0000    0.0000    1.0000
0          0          0          1.0000
```

De forma similar mediante la transformación Denavit Hartenberg:

```
DENAVITHARTENBERG=[cos(teta) -
cos(alpha)*sin(teta) sin(alpha)*sin(teta)
a*cos(teta);
sin(teta) cos(alpha)*cos(teta) -
sin(alpha)*cos(teta) a*sin(teta);
0 sin(alpha) cos(alpha) d;
0 0 0 1]
```

Se obtiene el mismo resultado que en (37):

```
0.0000    -0.0000    1.0000    0.0000
1.0000     0.0000   -0.0000    1.0000
0          1.0000    0.0000    1.0000
0          0          0          1.0000
```

Para la simulación de las posiciones la configuración inicial de cadena vertical se programó el ángulo-articulación [01 02 03 04 05] por q1 a q5 de acuerdo a (37):

```
q1=0; q2=pi/2; q3=0; q4=pi/2; q5=0; %Valores
pos1=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos1)%PLOTEO 1
Rob.fkine(pos1) %Generaciyn de MTD
```

Con lo que obtuvo la transformación directa coincidiendo con los valores de (38):

```
pos1= 0 1.5708 0 1.5708 0
ans =
-1 0 0 0
0 -1 0 0
0 0 1 33
0 0 0 1
```

En la figura 7 se describe la simulación de la posición obtenida mediante la MTD (38).

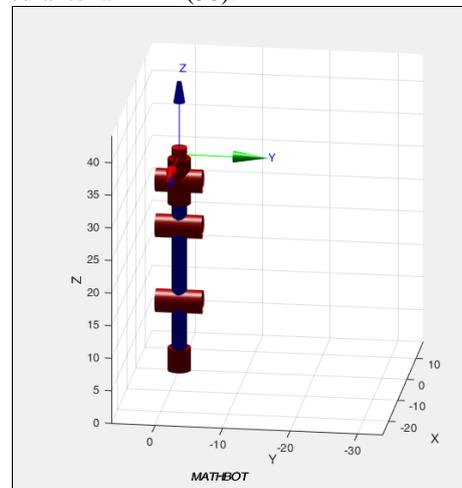


Fig. 7. Posición de inicio con todos los servos energizados de acuerdo a la MTD (14).

Para la programación de la posición desenergizada de los servomotores da configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ viene dada por (39) con:

```
q1=0;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=pi/4;q5=0; %Valores
pos2=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos2) %PLOTEO
Rob.fkine(pos2) %Generaciyn de MTD
```

Obteniendo su MTD que coincida con (40):

```
pos2 = 0    1.5708    -2.3562    0.7854    0
ans =
    1         0         0         4.95
    0        -1         0         0
    0         0        -1        13.05
    0         0         0         1
```

Su ploteo en modo de “reposo” se describe en la figura 8.

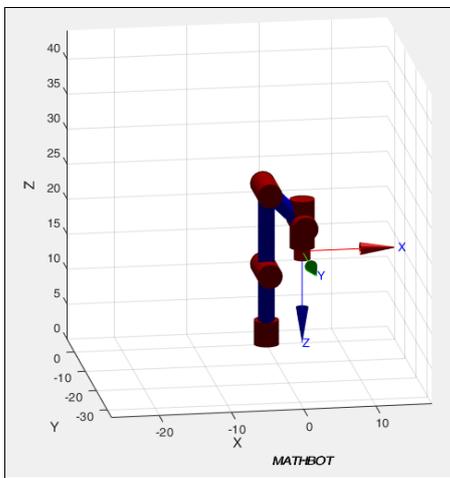


Fig. 8 Simulación de la posición de reposo de acuerdo a la MTD (40).

La posición para tomar un objeto tiene la configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ queda dada por (41) con el programa:

```
q1=0;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=3*pi/4;q5=0;
%valores
pos3=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos3) %PLOTEO
Rob.fkine(pos3) %Generaciyn de MTD
```

El resultado del efector final (E) coincide con la MTD (42):

```
pos3=0    1.5708    -2.3562    2.3562    0
ans =
    0         0         1         8.95
    0        -1         0         0
    1         0         0        17.05
    0         0         0         1
```

La simulación se describe en la figura 9 en donde se descartan los comandos del actuador final:

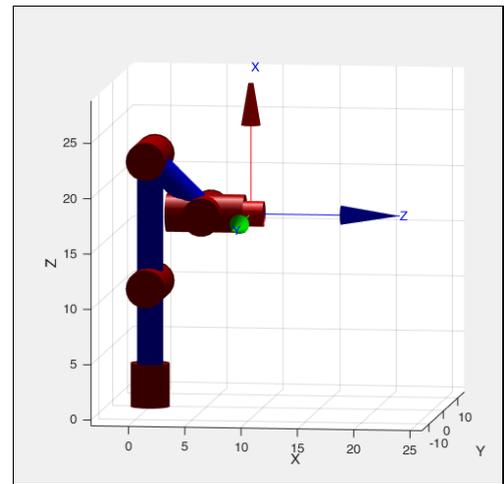


Fig 9. Posición de toma del objeto de acuerdo a la MTD (42).

Para la programación de la posición final para colocar el objeto en su posición final tiene la configuración angular $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ descrita en (43):

```
q1=pi;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=3*pi/4;q5=0;%valores
pos4=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos4) %PLOTEO
Rob.fkine(pos4) %Generaciyn de MTD
```

Susituyendo se obtiene el mismo resultado que en (44) por Matlab:

```
pos4=3.1416    1.5708    -2.3562    2.3562    0
ans =
    0         0        -1        -8.95
    0         1         0         0
    1         0         0        17.05
    0         0         0         1
```

El resultado de la simulación de los comandos anteriores se describe en la figura 10.

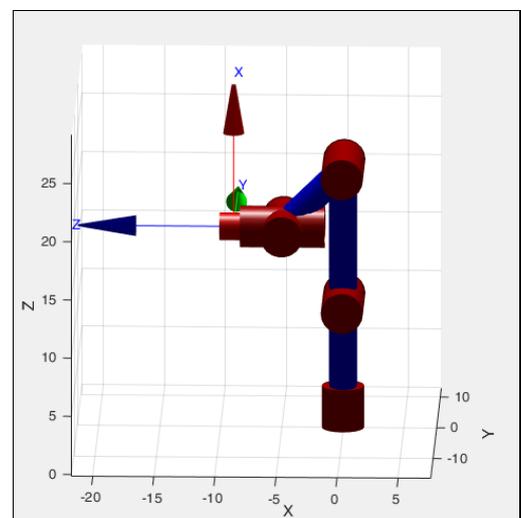


Fig. 10 Simulación de la posición en donde coloca el objeto el manipulador de acuerdo a la MTD (44)

VIII. MANUFACTURA.

Continuando con la metodología anterior y una vez realizado el diseño, modelado matemático y comprobado mediante su simulación en MATLAB como se describió anteriormente, se procedió a realizar un CAM mediante el programa AutoCAD del prototipo de acuerdo a los parámetros diseñados.

9.-Creación de prototipos y pruebas: Para la construcción de la estructura del prototipo se seleccionó el material SINTRA, debido a que es un PVC no frágil que permite ser manufacturado mediante una cortadora laser mediante un archivo CAD/CAM. La pieza diseñada en el CAD/CAM fueron manufacturadas mediante una cortadora laser y ensambladas con los servomotores como se muestra en la figura 11 y 12.

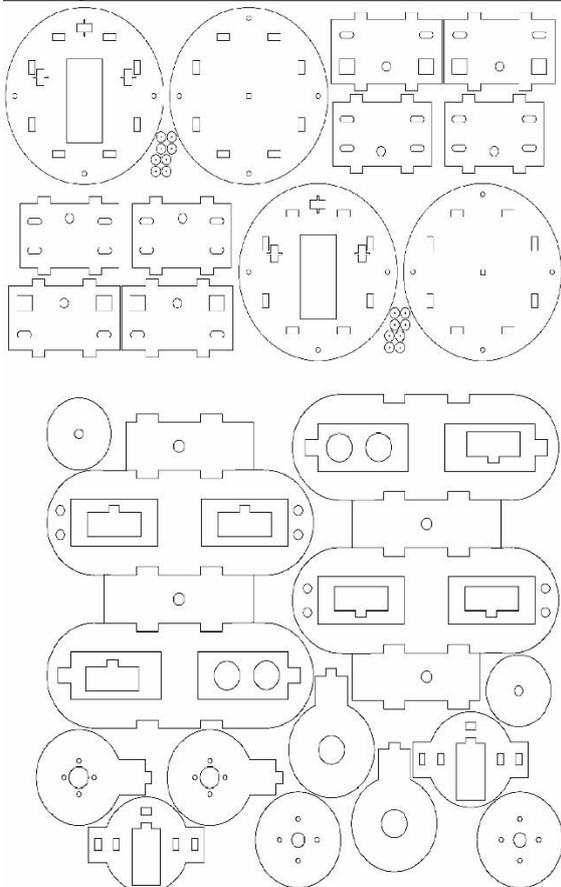


Fig 11. Piezas para manufactura de Cintra mediante corte laser mediante el CAM.

El paso “10.- Producción” fue descartado debido a que el prototipo tiene una función experimental de carácter científico y ha sido registrada; sin embargo, puede ser producida por un tercero solicitando los derechos correspondientes.



Fig 12. MATHBOT manufacturado y ensamblado en Cintra.

IX. PRUEBAS

Para realizar las pruebas se utilizó la tarjeta servocontroladora reprogramable *plug and play* USB-HID (Fajardo y Herrera, 2013) [22]; la cual permite controlar 30 servomotores simultáneamente mediante una GUI que mediante sliders con interpolación de Lagrange para generar el equivalente proporcional del valor del pulso PWM a cada servomotor mediante un sistema neurodifuso que compara y controla la posición actual del motorreductor respecto a la deseada hasta colocarse en ella [23].

Para las pruebas del manipulador se colocaron ejes para ordenadas y abscisas generando un mapa donde el robot fue manipulado mediante la programación de la GUI siguiendo las instrucciones obtenidas a través de las matrices modeladas y simuladas previamente.

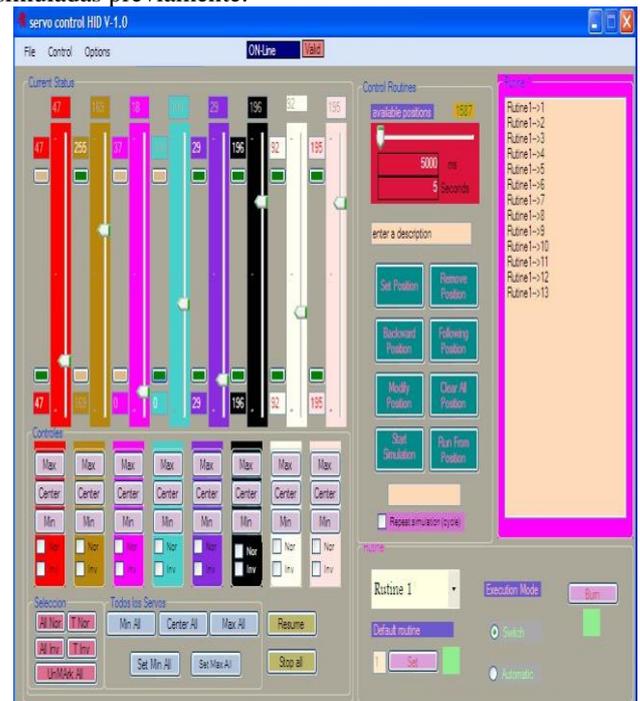


Fig. 13. GUI de la servocontroladora reprogramable USB-HID utilizada en el CIINDET 2013 de la IEEE [22].

Los ángulos de las imágenes fueron medidos y reconocidos por un sistema de reconocimiento de patrones con visión artificial con base a los puntos indicados.

Se calibraron las posiciones máximas y mínimas de los servomotores, así como la posición inicial de los eslabones para que se adecuara con el modelo matemático anteriormente descrito con ayuda del sistema de servocontrol.

Se comparó el resultado de cada uno de los movimientos obtenidos por el robot físico respecto a la simulación y modelado matemático.

Para el primer movimiento de calibración de cadena energizada se obtuvo una posición que coincide con la MTD (38) y la figura 14, en donde se encontró que coinciden las alturas mínimas y corresponde a lo modelado.

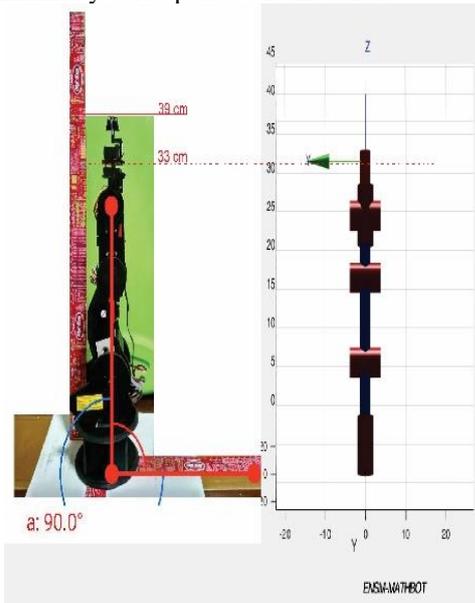
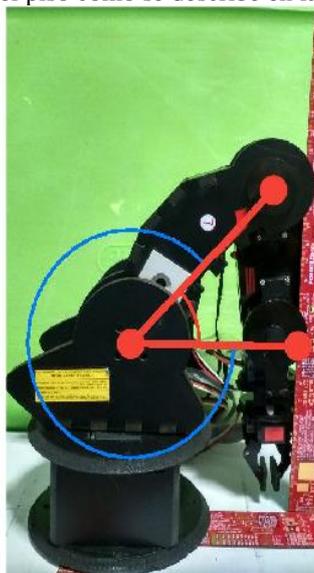


Fig 14. MATHBOT en posición de cadena energizada.

Para el segundo movimiento se obtuvo una posición de reposo de acuerdo a la Fig. 8 y la MTD (40) posicionando las articulaciones en el piso como se describe en la figura 15.



a: 45.0°

Fig 15. MATHBOT En posición de reposo

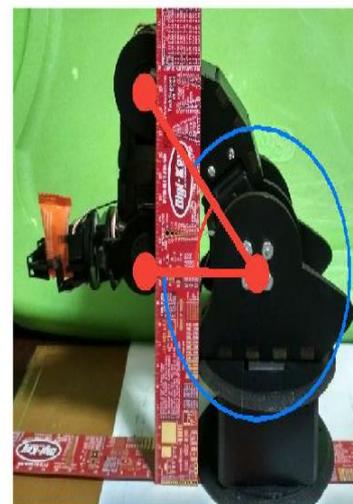
Para tomar el objeto se utilizó la MTD (42) coincidiendo con la simulación de la figura 9 y colocando el actuador final (gripper) en modo de apertura para t_0 y en cierre para t_1 , como se describe en la figura 16.



a: 45.0°

Fig 16. MATHBOT En posición de toma de objeto.

Para colocar en su posición final el objeto se utilizó la MTD (43) coincidiendo con la simulación de la figura 10 y colocando el actuador final (gripper) en modo de cierre para t_0 y en apertura para t_1 para liberar el objeto, como se describe en la figura 17.



a: 45.0°

Fig 17. MATHBOT En posición de colocado de objeto.

X. CONCLUSIONES

Al haber diseñado de acuerdo a la metodología de Norton [18], se logró la manufactura de un manipulador industrial vertical de 5 GDL de tipo brazo robot modelando 5 eslabones, 6 servomotores y un gripper como actuador final, el modelado matemático de su cinemática directa mediante matrices D-H [21], su simulación en MATLAB, el diseño CAD de sus eslabones y su manufactura CAM en SINTRA mediante corte laser.

La metodología de diseño, modelado, simulación y manufactura permitió la ensamble y construcción de un prototipo de brazo robot con servomotores Hitec controlado a través de una tarjeta USB-HID servocontroladora de secuencias programables con una interfaz gráfica mediante de sliders y valores [22] [23].

El prototipo fue diseñado para cumplir con las dimensiones del modelo matemático y calibrado de acuerdo al espacio cinemático simulado.

Las pruebas de movimiento realizadas con el prototipo de brazo robot coincidieron con las simulaciones en MATLAB y el modelo matemático [14], como se describe en las pruebas de control de las figuras 14 a la 17 con sus respectivos modelos matemáticos y simulaciones en MATLAB.

El modelado matemático de fenómenos físicos y su comprobación mediante simulaciones permite la construcción y control de maquinaria industrial, así como la descripción de fenómenos físicos de manera universal.

Se resalta la importancia y aplicación de la matemática como lenguaje de descripción de la realidad para poder construir modelos matemáticos que permiten dar pie a esquemas, diseños y simulaciones previas a la construcción de maquinaria ahorrando tiempos, movimientos y un gasto innecesario de recursos y materia de manufactura.

Es importante utilizar servomotores digitales que permiten 360 grados de libertad para pruebas específicas [23]; así mismo se puede jugar con diseños estilizados del manipulador en Sintra mientras se mantengan las distancias en un punto de referencia y se calibren los servomotores a las posiciones de arranque como se realizó en el experimento.

El prototipo se puede llevar a un sistema de ensamblaje industrial profesional con materiales metálicos y servomotores de corriente alterna mediante tarjetas controladores con interfaces convertidoras.

REFERENCIAS

- [1] Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc (ABET) Definition of Engineering Design. Consultado el 14 de Mayo de 2019. Disponible en: <https://www.abet.org/accreditation/accreditation-criteria/criteria-for-accrediting-engineering-programs-2016-2017/>.
- [2] Hawkins, T. W.: Weierstrass and the theory of matrices: *Archive for History of Exact Sciences* 17 (USA,1977).
- [3] Gerolamo, C. trad. Witmer, T. R.: The Rules of Algebra (Ars Magna). Paperback: Dover Publications (USA,2007).
- [4] Knobloch, E.: Determinants: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences (USA,1994).
- [5] De Witt's, J.: Elementa Curvarum Linearum Liber Secundus: Edited by Jan Aarts & Edited by Miente Bakker, Edited by Reinie Erne: Springer (UK, 2010).
- [6] Knobloch, Eberhard, Komatsu, Hikosaburo, Liu, Dun (Eds.): Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan: Springer (Japan, 2013).
- [7] MacLaurin, C.: Treatise of Algebra Vol I-III Containing. The fundamental rules: J. Nourse, W. Strahan, J. F. and C. Rivingtons, W. Johnston, T. Longman, G. Robinson, and T. Cadell Editors (USA,1749)
- [8] Cramer. G.: Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques: Freres Cramer & Cl. Philbert (Génova,1750).
- [9] Luigi, P.: Lagrange (1736–1813): a life in mathematics: *Lettera Matematica June 2014, Volume 2, Issue 1–2, pp 3–8*. Pepe, L. Lett Mat Int (USA,2014) 2: 3.
- [10] Gauss, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae: Nabu Press (USA, 2014)
- [11] Malykh, A E.: Development of the general theory of determinants up to the beginning of the nineteenth century (Russian): *Mathematical analysis: (Leningrad, 1990)*, 88-97.
- [12] Gauss, C. F.: Disquisitiones generales circa superficies curvas: Typis Dieterichianis. Collection (USA,1828).
- [13] Swetz, F. J.: Mathematical Treasure: Cauchy's Mathematical Exercises: Pennsylvania State University (USA,1826).
- [14] Mikhalkin, E. N.: Solution of fifth-degree equations: *Russian Mathematics* 53(6):15-23 (U.R.S.S., 2009) DOI: 10.3103/S1066369X09060036.
- [15] Eigner, M.: An Initial Approach for the Application of Product Assembly Information in the Early Phases of the Product Development Process by Using Methods of Model Based Systems Engineering: *Proceedings of the Nord Design 2014;724-733* (USA,2014).
- [16] Labarca, Claudio; Culagovski, Rodrigo y Danilo Lagos.: Nuevos territorios: *El modelo digital como laboratorio de formas en la enseñanza de la arquitectura: Ponencias SIGRADI 2005*: Porto Alegre Ed. (Brazil, 2005).
- [17] Bonsiepe, G.: Diseño Industrial, Tecnología y Dependencia: Edicol (Colombia,1978).
- [18] Norton, R.: Diseño de Maquinaria. Mc Graw Hill.Rodríguez, G. (México, 2009).
- [19] Dulces Anahuac: Caramelo Selz Soda. <http://www.dulcesanahuac.com/148/productos/selz-soda/> Consultado el 14 de Mayo de 2019.
- [20] ISO. Standard 8373. <https://www.iso.org/standard/55890.html> Consultado el 14 de Mayo de 2019.
- [21] Hartenberg and J. Denavit: Kinematic Synthesis of Linkages: McGraw-Hill, (USA,1964).
- [22] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.-G.: Servocontrolador Reprogramable para Articulaciones Robóticas USB HID: *Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE. 2013, Cuernavaca, Morelos, 13-15 de Marzo, 2013*: IEEE internacional (México, 2013).
- [23] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.-G.: Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación: *Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje 2016*: Marcos Fajardo Rendón y Francisco Guillermo Herrera Armendia Editores (México,2016).